



I.Q.A. LUIS OMAR JAMED BOZA

Dr. Rafael Lucio No. 199-D
Xalapa Eqz., Ver., México C.P. 91000
Tel. (01)(228)8155385
Cel. (044228)9794615
lojb33@yahoo.com.mx
lojb@prodigy.net.mx

Tema A03

Temas suplementarios para reforzar las materias Estadísticas

CONTENIDO GENERAL

3. Distribuciones Continuas de Probabilidad

3.1	Uniforme -----	2
3.1 ^a	Triangular -----	3
3.2	Exponencial -----	7
3.3	Gamma -----	9
3.4	Weibull -----	11
3.5	Beta -----	13
3.6	Normal -----	17
3.7	Lognormal -----	20
3.8	Función Generadora de Momentos y Función Característica -----	23

Distribuciones Continuas de Probabilidad



Distribución Uniforme:

La Distribución Uniforme, es muy útil en la generación de números al azar, ya que la probabilidad de cualquier intervalo “**dx**”, dado en su función de densidad de probabilidad, es constante, recordando que la probabilidad es el área bajo la función de densidad (Integral de la función).

Tiene la siguiente Función de Densidad, Función de Distribución Acumulada (FDA), Media y Varianza de la Distribución Uniforme, y Función Generadora de Momentos.

Función de Densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{para } \alpha \leq x \leq \beta$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

En donde α y β son constantes reales tales que $\alpha < \beta$.

Función de Distribución Acumulada (FDA):

$$F(x) = 0 \quad \text{para } x < \alpha$$

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{para } \alpha \leq x \leq \beta$$

$$F(x) = 1 \quad \text{para } x > \beta$$

Media: $\mu = E(x) = \frac{(\beta + \alpha)}{2}$

Varianza: $\sigma^2 = V(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$

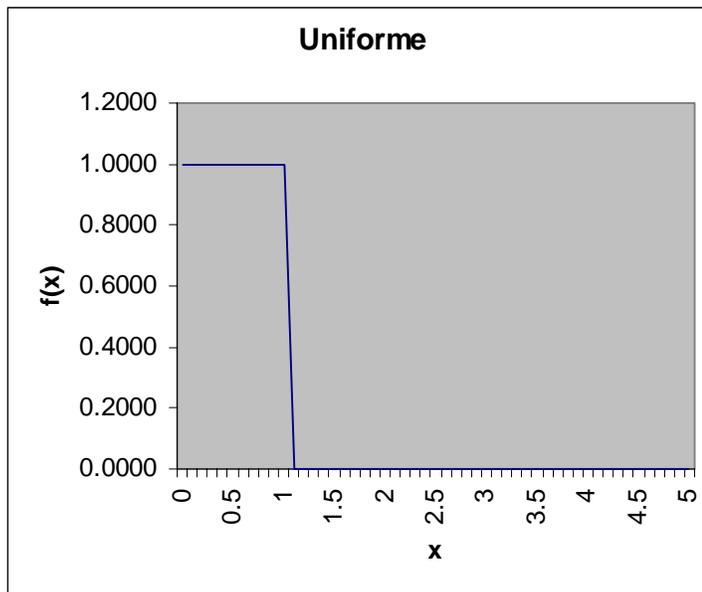
Función Generadora de Momentos:

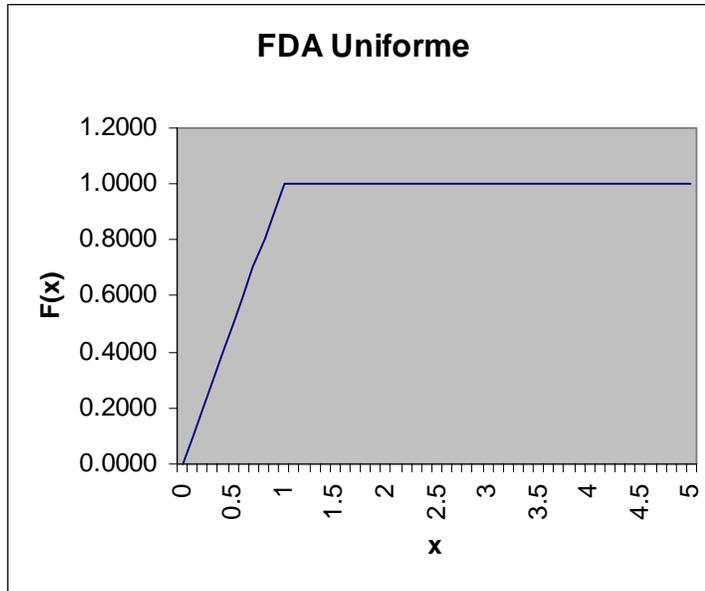
$$Mx(t) = \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)} \quad \text{para } t \neq 0$$



Su Comportamiento Gráfico es:

$\beta=1.0000$	$\alpha=0.0000$	$\mu=0.5000$	$\sigma^2=0.0833$
----------------	-----------------	--------------	-------------------





Distribución Triangular¹:

En procesos industriales donde se busca la linealización de comportamientos en partes del proceso técnico industrial, muchas veces es útil éste tipo de distribución, a continuación se plantea la función de densidad, la función de distribución acumulada (FDA), su media y varianza.

Función de Densidad Triangular tiene la siguiente expresión: Sea **f** factor de posición del punto que con el origen y la Base forma el triángulo ($0 \leq f \leq 1$), sea **B** la longitud de la Base iniciando en el origen **(0,0)**, entonces tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{B^2}(B-x) & \text{para } f=0 \text{ y } 0 \leq x \leq B \\ \frac{2}{fB^2}x & \text{para } 0 < f < 1 \text{ y } 0 \leq x \leq fB \\ \frac{2}{B^2(1-f)}(B-x) & \text{para } 0 < f < 1 \text{ y } fB < x \leq B \\ \frac{2}{B^2}x & \text{para } f=1 \text{ y } 0 \leq x \leq B \end{cases}$$

Media: $\mu = \frac{B}{3}(f+1)$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{B^2}{18}(1-f+f^2)$



¹ La definición del parámetro “B” y “f” es desarrollo personal por aplicaciones, puede encontrarse definida a partir de las líneas rectas y el eje “x”.

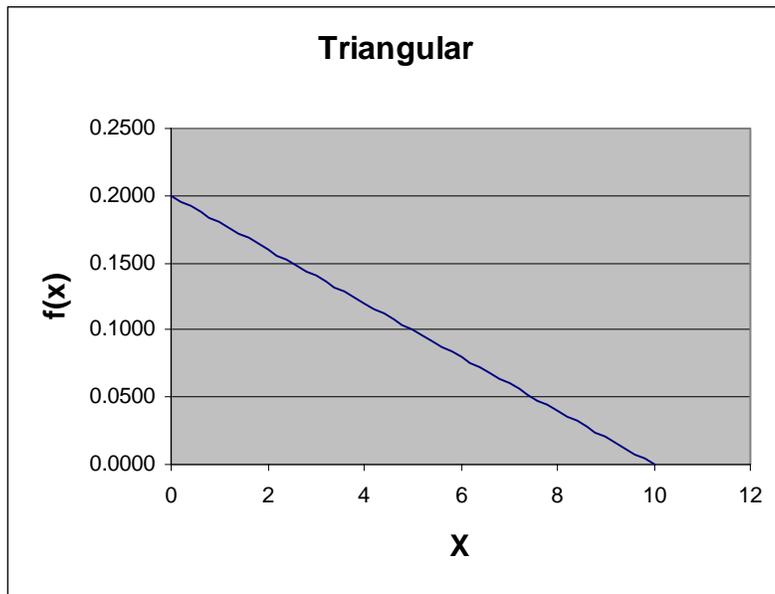


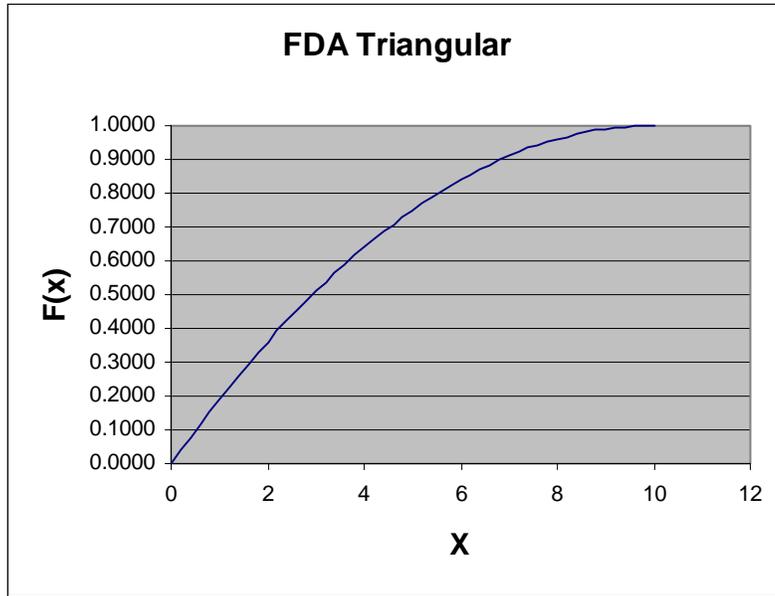
La Función de Distribución Acumulada (FDA) de la densidad triangular es:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{B}x - \frac{x^2}{B^2} & \text{para } f = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq B \\ \frac{x^2}{fB^2} & \text{para } 0 < f < 1 \text{ y } 0 \leq x \leq fB \\ \frac{2Bx - fB^2 - x^2}{B^2(1-f)} & \text{para } 0 < f < 1 \text{ y } fB < x \leq B \\ \frac{x^2}{B^2} & \text{para } f = 1 \text{ y } 0 \leq x \leq B \end{cases}$$

Su comportamiento gráfico es:

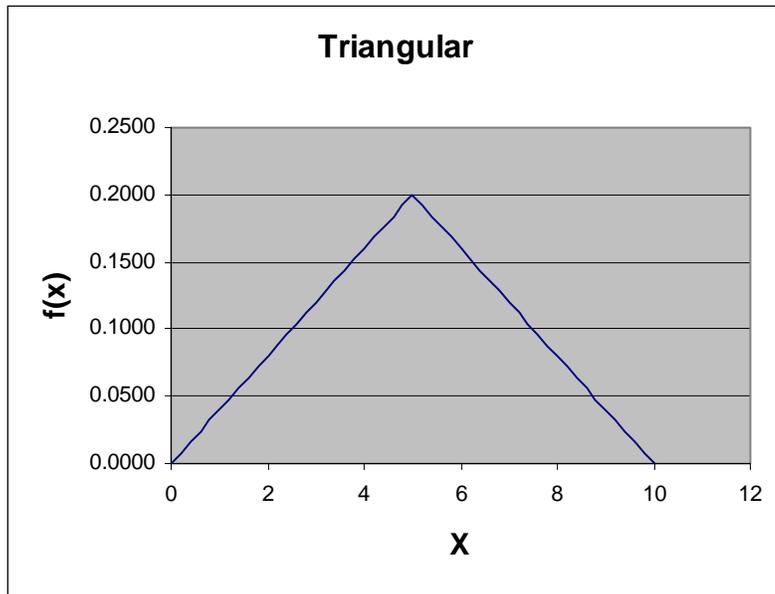
Base= 10	Fact= 0.0000	$\mu =$ 3.3333	$\sigma^2 =$ 5.5556
----------	--------------	----------------	---------------------

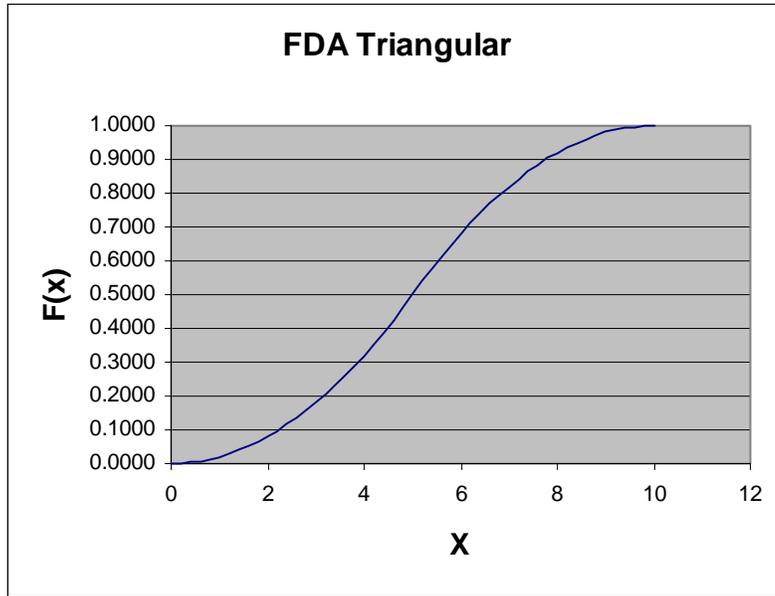




Base=10 Fact=0.5000

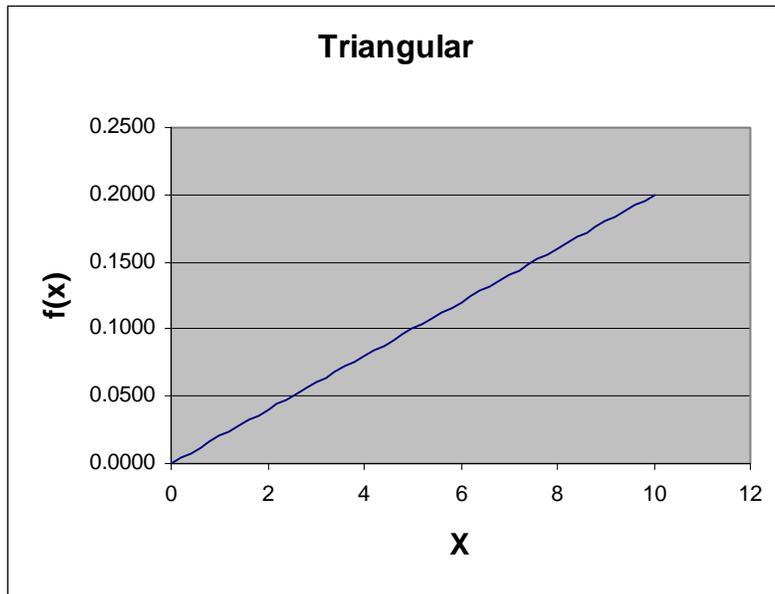
$\mu=$ 5.0000 $\sigma^2=$ 4.1667

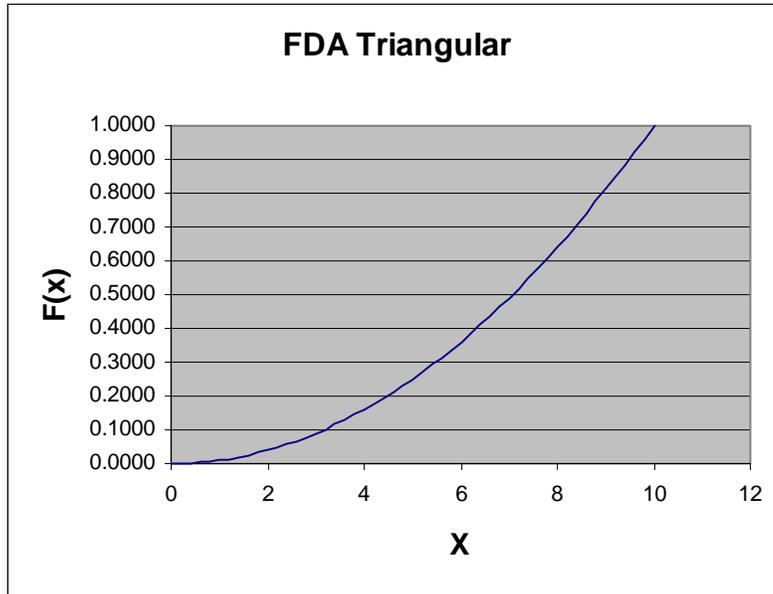




Base= 10	Fact= 1.0000
----------	--------------

$\mu =$ 6.6667	$\sigma^2 =$ 5.5556
----------------	---------------------





Distribución Exponencial:

Bajo el Proceso Poisson visto en la sección A02, la distribución discreta Poisson está relacionada a eventos de ocurrencia relativa en el tiempo, en la Poisson la variable aleatoria “x” es discreta puesto que representa el número de eventos que pueden suceder en un tiempo “t fijo”. Si el mismo proceso es visto por el lado de la variable aleatoria continua “t” y queda definida como el tiempo en que transcurre hasta el inmediato primer evento discreto, obtenemos la **Función de Densidad Exponencial** que tiene la siguiente expresión:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor de } t.$$

Al resolver la ecuación diferencial **2.8 – 1** de la sección anterior para la Poisson, encontramos que la probabilidad de que suceda ninguna ocurrencia del evento discreto en el intervalo [0, t] es:

$P_0(t) = P(0) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$ Probabilidad de que el tiempo de la 1° ocurrencia sea mayor que “t”.

Conforme a lo anterior, la probabilidad de ocurrencia a lo más en un tiempo “t” es:

$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ Probabilidad de que el tiempo de la 1° ocurrencia sea a lo más de “t”.

Para la solución secuencializada de las ecuaciones diferenciales **2.8 – 1** y **2.8 – 2**, de la sección A02, se logra substituyendo la solución anterior en la expresión en la ecuación **2.8 – 2**, iniciando con $e^{-\lambda t}$ y las subsecuentes soluciones con $e^{-\lambda t}((\lambda t)^x/x!)$, o utilizando transformadas de Laplace consecutivas².

Media, Varianza, FDA y Función Generadora de Momentos son:

Media: $\mu = E(x) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ la variable “x” es el tiempo “t” de la Exponencial, para que la “t” que aparece en la función de momentos siga siendo la variable de la función de Momentos.

Varianza: $\sigma^2 = V(x) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

En muchas aplicaciones es preferible manejar $\beta = 1/\lambda$ se conoce con el nombre de **tiempo medio de ocurrencia**, es el recíproco de la **tasa media de ocurrencia** “λ”.

² Desarrollo personal, se llega a la expresión Poisson por el lado discreto, ó se llega a la expresión Gamma por el lado Continuo.

Función de Distribución Acumulativa FDA:

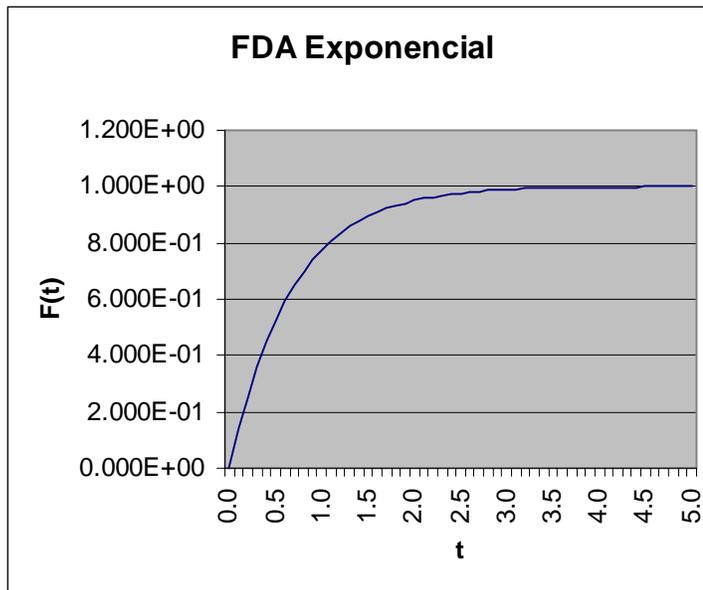
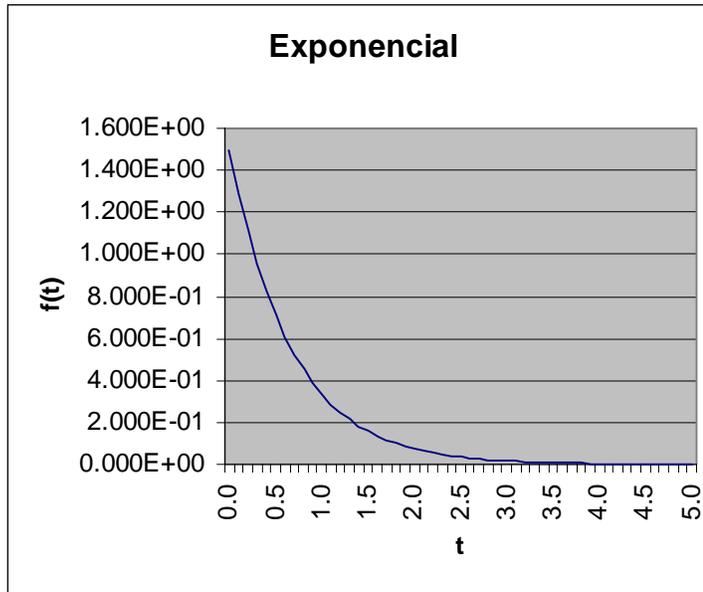
$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{para } x < 0$$

Función Generadora de Momentos: $Mx(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$ para $t < \lambda$.³

Su comportamiento Gráfico es:

$\lambda=1.5000$		$\mu=0.6667$	$\sigma^2=0.4444$
------------------	--	--------------	-------------------



³ Para valores de "t" diferentes se debe apoyar en la Función Característica.



Distribución Gamma:

Se puede analizar bajo el Proceso Poisson que la suma de “r” variables aleatorias Poisson distribuidas independientemente con parametros individuales “ α_i ”, también generan una distribución Poisson con parámetro “ α ”, siendo la nueva variable y nuevo parámetro en la siguiente forma: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$; con parámetro: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$.

Podemos hacer la demostración ayudados con la función generadora de momentos(FGM) de las distribuciones individuales Poisson:

FGM individual de la variable x_i : $M_{x_i}(t) = e^{\alpha_i (e^t - 1)}$

El momento de la nueva variable x es: $M_x(t) = M_{x_1}(t)M_{x_2}(t)\dots M_{x_r}(t)$

La FGM de la nueva variable x es: $M_x(t) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r)(e^t - 1)} = e^{\alpha(e^t - 1)}$

Cada variable Poisson está asociada a un tiempo o variable exponencial independiente con parámetro constante “ λ ”, si “ t_i ” es la variable exponencial entonces, la suma de variables “ t_i ” genera una nueva variable “ t ” que sigue una distribución Gamma.

Densidad, Media, Varianza, FDA y Función Generadora de Momentos de Gamma:

La Distribución Gamma tiene dos parámetros importantes, estos son: la “ $r > 0$ ” y la “ $\lambda > 0$ ”, el primero es el **parámetro de forma** y el segundo es el **parámetro de escala**.

Función de Densidad: $f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}$ para $x > 0$.

Media: $\mu = E(x) = \frac{r}{\lambda}$

Varianza: $\sigma^2 = V(x) = \frac{r}{\lambda^2}$

Función de Distribución Acumulativa FDA:

$F(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t} dt$ para $x > 0$

$= 0$ para $x \leq 0$

Si r es un entero positivo, entonces puede integrarse por partes teniendo como resultado:

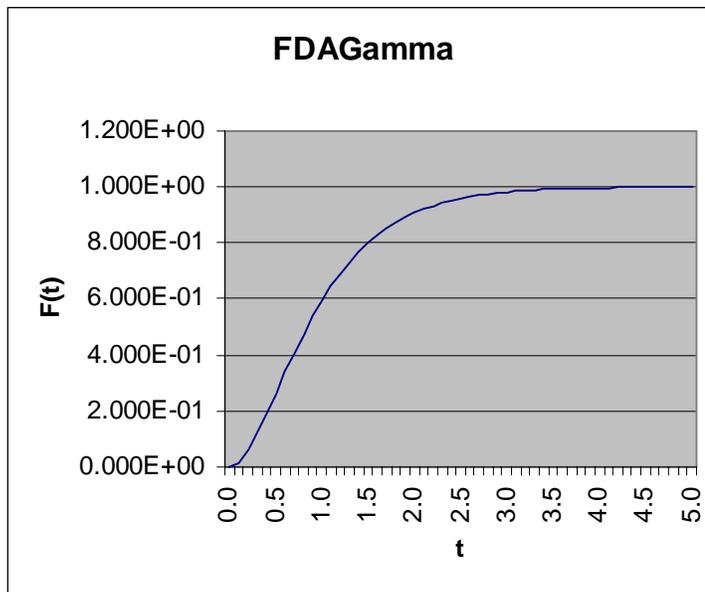
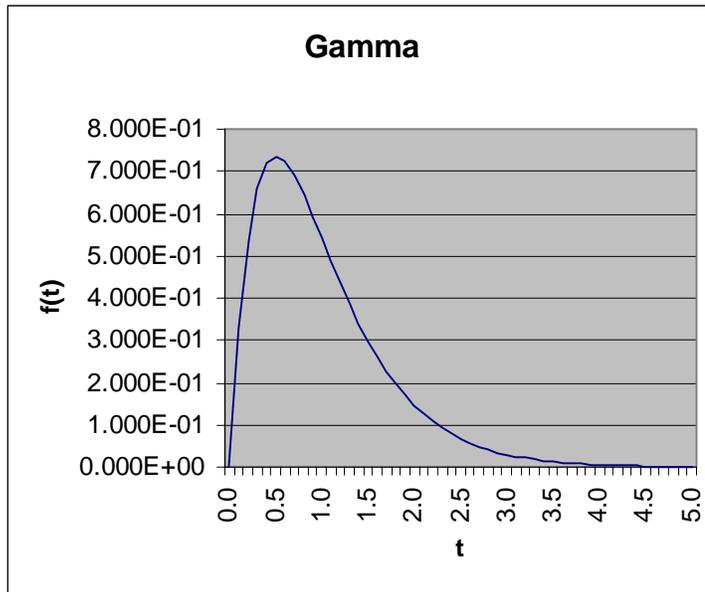
$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ para $x > 0$

Función Generadora de Momentos: $M_x(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r}$ para $t < \lambda$.



Su comportamiento Gráfico es:

$r=2.0000$	$\beta=1/\lambda$ 0.5000	$\mu=1.0000$	$\sigma^2=0.5000$
------------	--------------------------	--------------	-------------------





Distribución de Weibull:

La Distribución de Weibull, desarrollada en 1951, proporciona una buena aproximación a los diferentes comportamientos de la Probabilidad, para una variedad grande de posibles variables aleatorias, conforme al reporte dado por Berretoni en 1964⁴, colocó 5 ejemplos de su utilización.

1. Resistencia a la Corrosión de Placas de Aleación de Magnesio. Manejando “x” variable aleatoria continua, como pérdida de peso por corrosión de 10²mg/((cm²)(día)), cuando las placas de aleación de Magnesio se sumergen en una solución acuosa inhibida al 20% de MgBr (Bromuro de Magnesio).
2. Artículos regresados clasificados por el número de semanas posteriores al envío. Manejando “x”, como duración del período (10¹ semanas) hasta que el cliente regresa el producto defectuoso después del envío.
3. Número de tiempos de interrupción por turnos. Manejando “x”, como No. De tiempos de interrupción por turno escalado a 10⁻¹, que ocurren en una línea de ensamble automática y continua.
4. Falla por fugas en baterías de celda seca. Manejando “x”, como envejecimiento (en años) cuando se inicia la fuga.
5. Fiabilidad (Confiabilidad) de Capacitores. Manejando “x”, como la vida (en horas) de capacitores de Tantalio sólido de 3.3 μF, 50V, que operan a una temperatura de 125°C, con voltaje nominal de 33V.

Densidad, FDA, Media y Varianza:

Tiene los siguientes parámetros reportados:

$\beta \rightarrow$ parámetro de forma $\rightarrow \beta > 0$.

$\delta \rightarrow$ parámetro de Escala $\rightarrow \delta > 0$.

$\gamma \rightarrow$ parámetro de localización $\rightarrow -\infty < \gamma < \infty$.

$$f(t) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{t-\gamma}{\delta} \right)^{(\beta-1)} e^{-\left[\left(\frac{t-\gamma}{\delta} \right)^\beta \right]} \quad \text{para } t \geq \gamma.$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{t-\gamma}{\delta} \right)^\beta \right]} \quad \text{para } t \geq \gamma.$$

$$\mu = E(t) = \gamma + \delta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$\sigma^2 = V(t) = \delta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \left\{ \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}^2 \right]$$

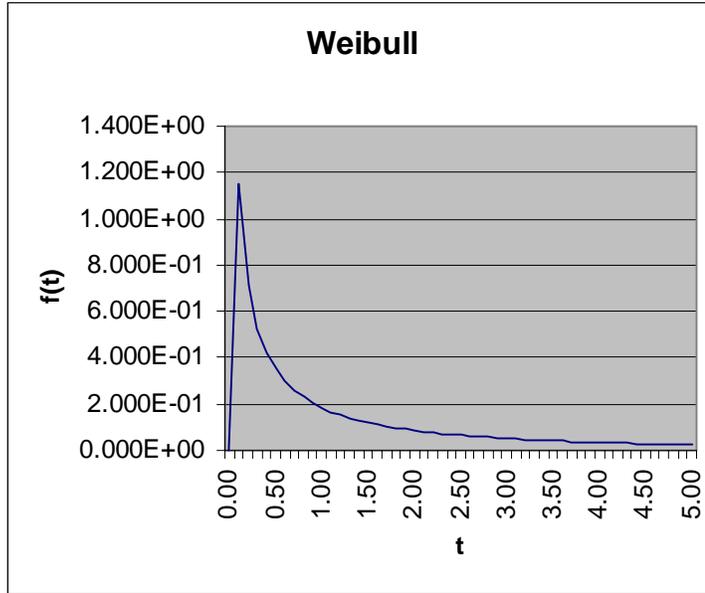


⁴ “Probabilidad y Estadística”, 3º Edición, W.W. Hines y D.C. Montgomery, CECSA 1995, págs. 215 a 217.

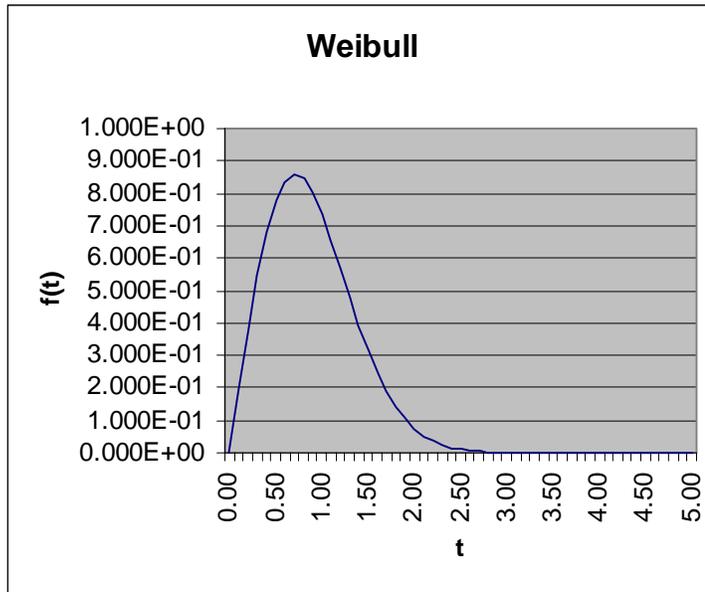


Su comportamiento Gráfico es:

$\beta=0.5000$	$\delta=1.0000$	$\mu=2.000E+00$	$\sigma^2=2.000E+01$
$\gamma=0.0000$	$\text{Finc}=0.1000$	3.0000	5.0000



$\beta=2.0000$	$\delta=1.0000$	$\mu=$	$\sigma^2=$
$\gamma=0.0000$	$\text{Finc}=0.1000$	1.5000	2.0000





Distribución Beta:

Las distribuciones Beta de Probabilidad, son una familia de funciones de densidad de probabilidad que tienen como variable aleatoria “T” continua con valores “t” dentro del intervalo abierto (0,1). Las siguientes relaciones son importantes tanto para la familia Gamma como para la familia Beta en sus funciones de densidad como de distribución, éstas son:

Para Integración por partes de expresiones de la Gamma las siguientes expresiones son útiles⁵:

$$(Exp.105) \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (Exp.140) \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ para } a > 0$$

Para las familias Gamma y Beta las siguientes expresiones son útiles⁶:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \text{ para } t > 0 \quad \Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$$

Si “t” es entero entonces $t = n \rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

Si “n” es entero con adición de 1/2, entonces el resultado es el siguiente:

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

El caso especial de $\Gamma(1/2)$ puede tratarse usando la expresión (140) anterior, haciendo substitución de variable siguiente: $Z = 1/2 x^{1/2}$, se obtiene que⁷: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Ya que en la familia de funciones de densidad Beta, la variable aleatoria continua “T” tiene valores “t” únicamente en el intervalo abierto (0,1), es muy útil para poder representar comportamientos de proporciones obtenidas de fenómenos naturales.

La **Función de Densidad de Probabilidad Beta** está dada por:

$$f(t) = f(t; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \text{ para } 0 < t < 1, a > 0, b > 0.$$

En donde “a” y “b” son parámetros de la función, la expresión “B(a,b)” es la función matemática Beta que se define como:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Entonces la **Función de Densidad de Probabilidad Beta** también puede expresarse como:

$$f(t) = f(t; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \text{ para } 0 < t < 1, a > 0, b > 0.$$

La **Función de Distribución Acumulativa (FDA)**, también es llamada Beta Incompleta y tiene la siguiente expresión:

$$F(t) = F_x(t; a, b) = \int_0^x \frac{1}{B(a, b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad \text{para } x \leq t \quad 0 < t < 1.$$

$$= 0 \quad \text{para } t \leq 0.$$

$$= 1 \quad \text{para } t \geq 1.$$



⁵ “Calculus and Analytic Geometry”, 4° Edition, Thomas, Adison Wesley, ©1968, listado de Integrales Importantes, expresiones 105 y 140.

⁶ “Introduction to the Theory of Statistics”, Mood, Graybill and Boes, 3° Edition, McGraw Hill ©1974, Appendix A, pages 534 and 535.

⁷ Desarrollo Personal, partiendo de la expresión 140, sin hacer la demostración de la expresión anterior, en el ejemplo No. 5 de la referencia (4), en las páginas 307 y 308 se demuestra que existe valor finito.



La Función Generadora de Momentos de la Distribución Beta, no tiene una expresión sencilla y es preferible obtener sus momentos a partir de la propia expresión de definición, en la siguiente expresión $E(t^k)$ representa el “késimo” momento a partir del origen.

$$E(t^k) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{(k+a-1)} (1-t)^{(b-1)} dt = \frac{B(k+a,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(b)}{\Gamma(k+a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(k+a+b)}$$

Recordando que la Media es el primer momento con respecto al origen y la Varianza es el segundo momento con respecto a la media, tenemos:

$$\mu = E(t) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}$$

$$\sigma^2 = V(t) = E(t^2) - \mu^2 = \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+2)} - \mu^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

Su comportamiento Gráfico es muy variado y son los siguientes:

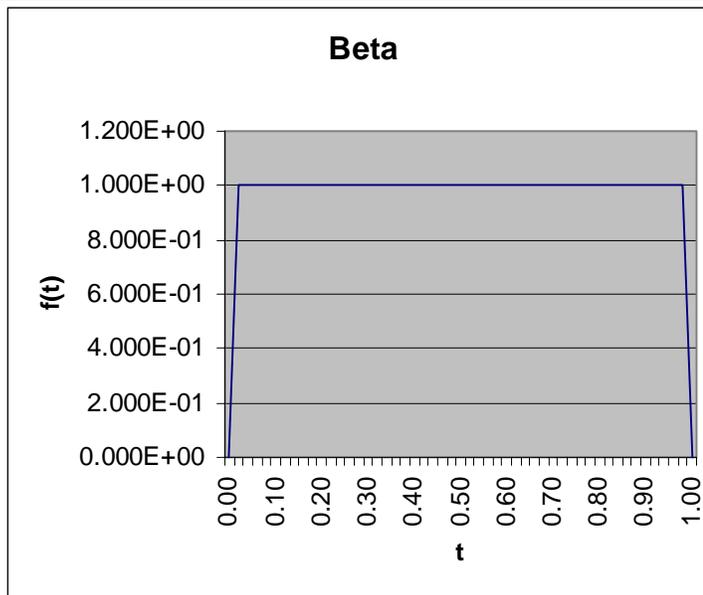
Con $a = 1$ y $b = 1$ se reduce a la distribución Uniforme.

Con $a = 2$ y $b = 1$ o $a = 1$ y $b = 2$ se reduce a forma triangular.

También genera diferentes comportamientos a otros valores.

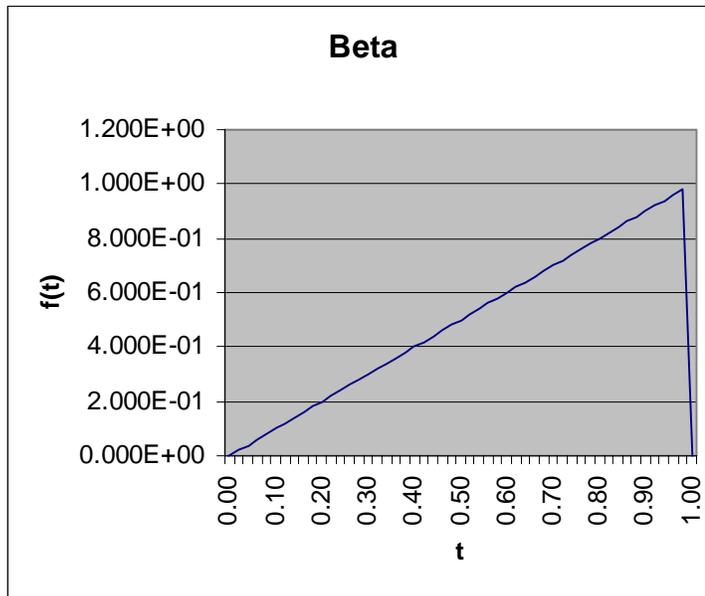


a=1.0000	b=1.0000	μ=0.5000	σ²=0.0833
----------	----------	----------	-----------

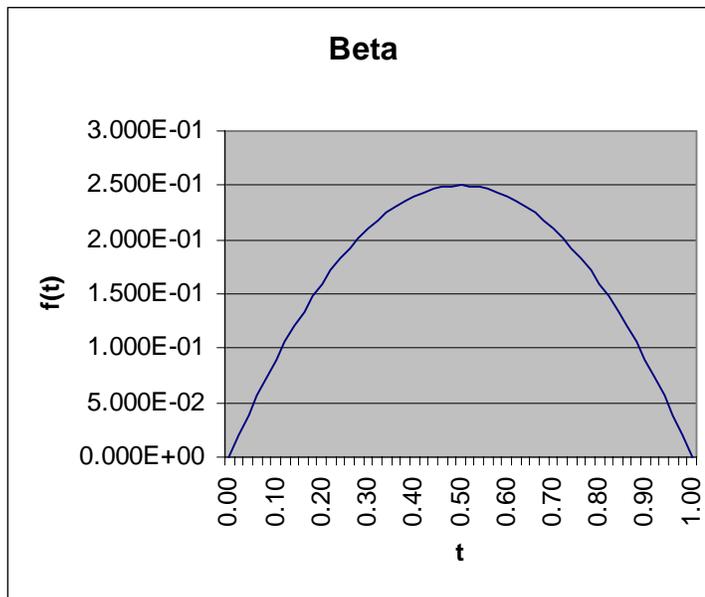




a=2.0000	b=1.0000	$\mu=0.6667$	$\sigma^2=0.0556$
-----------------	-----------------	--------------------------------	-------------------------------------

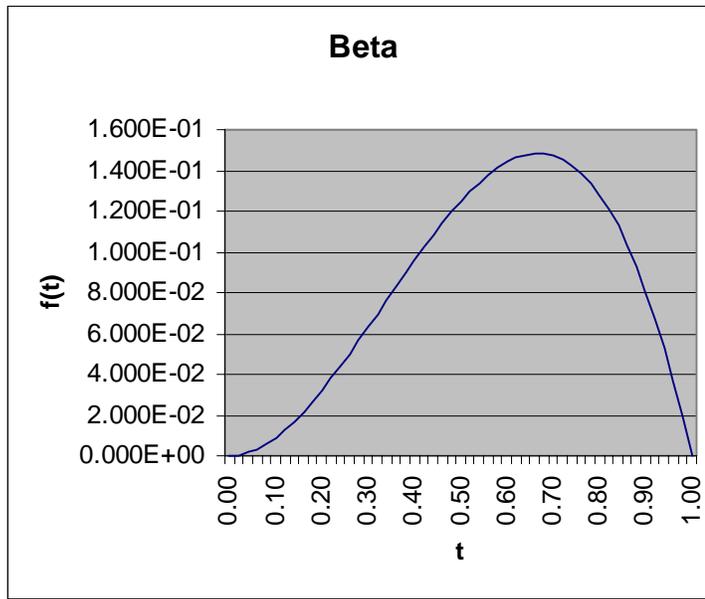


a=2.0000	b=2.0000	$\mu=0.5000$	$\sigma^2=0.0500$
-----------------	-----------------	--------------------------------	-------------------------------------

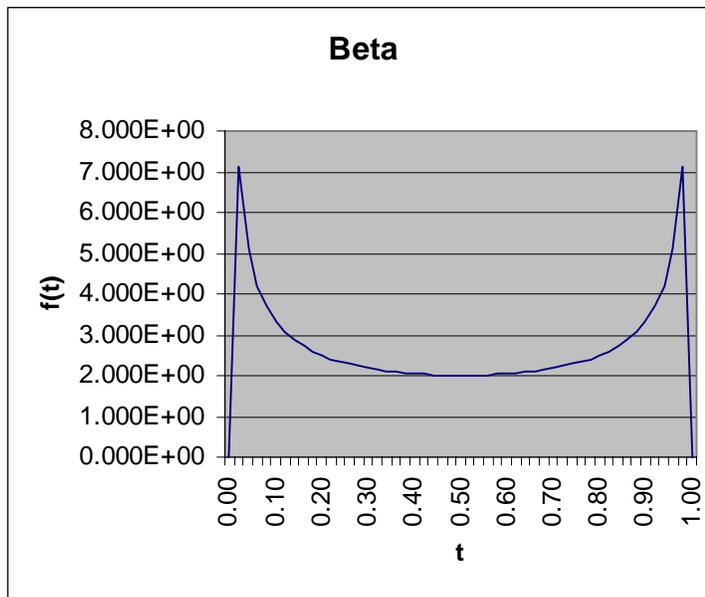




a=3.0000	b=2.0000	$\mu=0.6000$	$\sigma^2=0.0400$
-----------------	-----------------	--------------------------------	-------------------------------------



a=0.5000	b=0.5000	$\mu=0.5000$	$\sigma^2=0.1250$
-----------------	-----------------	--------------------------------	-------------------------------------





Su Varianza es:

$$V(t) = E(t^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu + \sigma z)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \mu^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Su Función de Distribución Acumulativa FDA es:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Sea “**x**” la variable normal y “**t**” la variable de la función de Momentos, su Función Generadora de Momentos es:

$$M_x(t) = e^{(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$$

Propiedad Reproductiva de la Normal

Sean “**n**” variables aleatorias Normales Independientes, cada una con $X_i \approx N(\mu_i, \sigma_i^2)$, en las cuales cada una en forma individual es probable que no contribuya de manera considerable a la suma de ellas, entonces podemos plantear una combinación lineal en la siguiente forma:

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, de donde, al utilizar la Función Generadora de Momentos tenemos:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t)$$

$$M_Y(t) = \left[e^{(\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2})} \right] \left[e^{(\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2})} \right] \dots \left[e^{(\mu_n t + \frac{\sigma_n^2 t^2}{2})} \right] = e^{(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2})}$$

En donde μ_Y y σ_Y^2 son:

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{y la Varianza} \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{podemos generalizar para combinaciones lineales}$$

del tipo: $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$, con resultado siguiente:

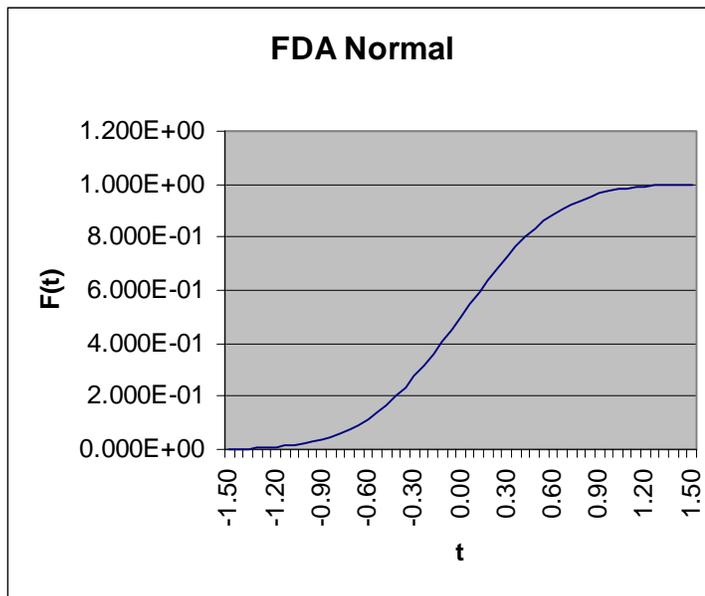
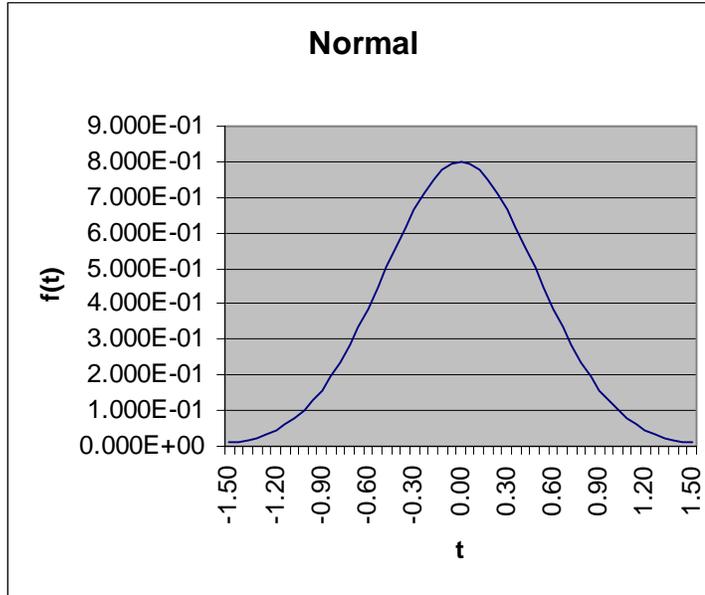
$$\mu_Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad \text{y la Varianza} \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 .$$





Su comportamiento Gráfico es:

$\mu=0.0000$	$\sigma=0.5000$	$\mu=0.0000$	$\sigma^2=0.2500$
$Finc=0.0600$			





Distribución LogNormal

Esta Distribución representa a una variable aleatoria “X” tal que su logaritmo natural “Y = Ln X”, representado por la variable aleatoria “Y”, sigue una distribución Normal, con parámetros “μ_Y” y “σ²_Y”. En una gran variedad de fenómenos en la naturaleza, existe el comportamiento logarítmico y exponencial, en estos casos el modelo de la Distribución LogNormal es muy útil para modelizar el comportamiento de los fenómenos.

Función de Densidad de LogNormal

Partiendo de la Distribución Normal para la variable “Y” y utilizando la condición (3) de la sección 1.17, la cual plantea la relación de 2 variables y modificando la expresión anterior para ser utilizada en la definición de variables de nuestro caso actual (Y es la var. Independiente Normal y X es la dependiente de la Y: (X = e^Y)), tenemos:

$$f_x(x) = f_y(y) \frac{dy}{dx} \quad \text{en donde } Y = \text{Ln } X \quad \text{obtenemos: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

La **Función de Densidad LogNormal**, es expresada en la siguiente forma⁹:

$$f(x; \mu_Y, \sigma_Y^2) = \frac{1}{x \sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Ln } x - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2} \quad \text{para } x > 0.$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor de “x”}.$$

La **FDA de la LogNormal**, es expresada en la siguiente forma:

$$F(x; \mu_Y, \sigma_Y^2) = \int_0^x \frac{1}{t \sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Ln } t - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2} dt$$

Puede también determinarse los valores de la probabilidad haciendo la transformación a Normal con Y = Ln X.



Media, Mediana, Moda, Varianza y Momentos en el Origen de la LogNormal

Su Media y Varianza es: $\mu_X = E(x) = e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2}$, $\sigma_X^2 = V(x) = e^{2\mu_Y + \sigma_Y^2} (e^{\sigma_Y^2} - 1)$

Su Mediana es: $x = e^{\mu_Y}$

Su Moda o Modo es: $MO = e^{\mu_Y - \sigma_Y^2}$

El Momento k-ésimo en el origen es: $\mu'_k = e^{k\mu_Y + \frac{1}{2}k^2\sigma_Y^2}$

NOTA: La prima representa momento en el origen.

Son importantes el tercero y cuarto momentos alrededor de la Media, ya que son aplicados en dos medidas descriptivas importantes de las Funciones de Densidad de Probabilidad, éstas medidas descriptivas son: El **coeficiente de Asimetría** y el **coeficiente de Curtosis**.

Sea “c” el valor siguiente: $c = e^{\sigma_Y^2} - 1$



⁹ Analizando la Distribución, la variable “Y” es la Normal, entonces la transformación desarrollada hace que “X” realmente sea (X = e^Y), se ha llamado LogNormal, visto desde la variable “Y” la transformación algebraica es exponencial.



El 3° Momento alrededor de la Media es¹⁰:

$$\mu_3 = \mu_X^3 (c^6 + 3c^4)$$

El 4° Momento alrededor de la Media es:

$$\mu_4 = \mu_X^4 (c^{12} + 6c^{10} + 15c^8 + 3c^4)$$

El Coeficiente de Asimetría es:

$$\zeta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} \quad \zeta_1 > 0 \text{ asimetría positiva}$$

El Coeficiente de Curtosis con referencia a la Normal es:

$$\zeta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3$$

Valor positivo de Curtosis con referencia a la Normal, implica que tiene mayor agudeza vertical la función de Densidad con respecto a la Normal (la Normal Estandar tiene una curtosis de 3).

En particular los coeficientes de Asimetría y Curtosis para la LogNormal son:

$$\zeta_1 = c^3 + 3c \quad \text{y} \quad \zeta_2 = c^8 + 6c^6 + 15c^4 + 16c^2$$

Propiedad Reproductiva de la LogNormal

La Distribución Normal tiene propiedades reproductivas aditivas, la Distribución LogNormal tiene propiedades reproductivas multiplicativas, con las siguientes propiedades:

1. Si "X" es una distribución LogNormal con parámetros μ_Y , σ^2_Y y **a**, **b**, **d** con constantes, tales que **b = e^d**, y se tiene la expresión **W = bx^a** entonces "W", tiene distribución LogNormal con parámetros **(d + aμ_Y)** y **(aσ_Y)²**.
2. Si **X₁** y **X₂** son variables LogNormal independientes, con parámetros **(μ_{Y1}, σ²_{Y1})** y **(μ_{Y2}, σ²_{Y2})** respectivamente, entonces "W" es: **W = X₁*X₂** y tiene Distribución LogNormal con parámetros **[(μ_{Y1} + μ_{Y2}), (σ²_{Y1} + σ²_{Y2})]**.
3. Si **X₁, X₂, ..., X_n** es una secuencia de "n" variables lognormales independientes, con parámetros **(μ_{Yj}, σ²_{Yj}) j = 1, 2, ..., n**; respectivamente, y **{a_j}** es una secuencia de constantes en tanto que **b = e^d** es una sola constante, y si convergen las expresiones:

$$\sum_{j=1}^n a_j \mu_{Yj} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_{Yj}^2$$

Entonces el Producto siguiente tiene una Distribución LogNormal con parámetros:

$$W = b \prod_{j=1}^n X_j^{a_j} \quad \text{con} \quad \mu_W = d + \sum_{j=1}^n a_j \mu_{Yj} \quad \text{y} \quad \text{con} \quad \sigma_W^2 = V(W) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_{Yj}^2$$

4. Si **X_j (j = 1, 2, ..., n)** son variables lognormales independientes, cada una con los mismos parámetros **(μ_Y, σ²_Y)**, entonces su **media Geométrica** tiene una Distribución LogNormal con parámetros **(μ_Y, σ²_Y/n)**, con la siguiente expresión:

$$\text{MedGeo} = \left(\prod_{j=1}^n X_j \right)^{\frac{1}{n}}$$

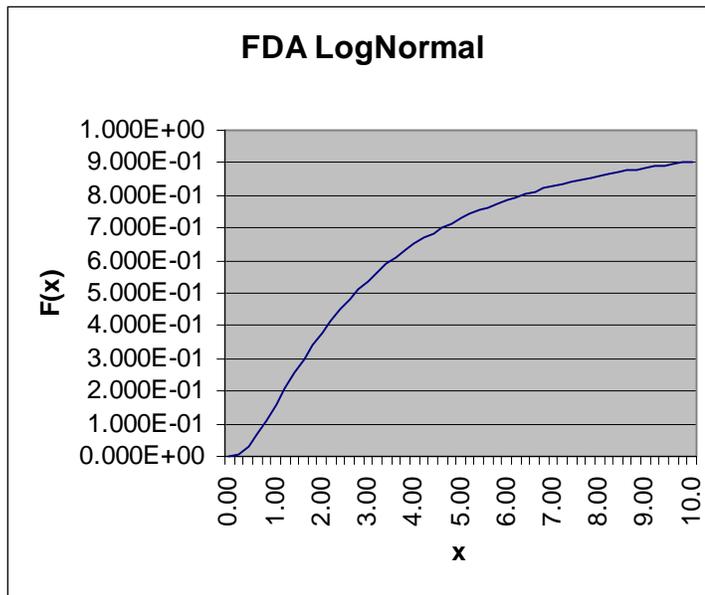
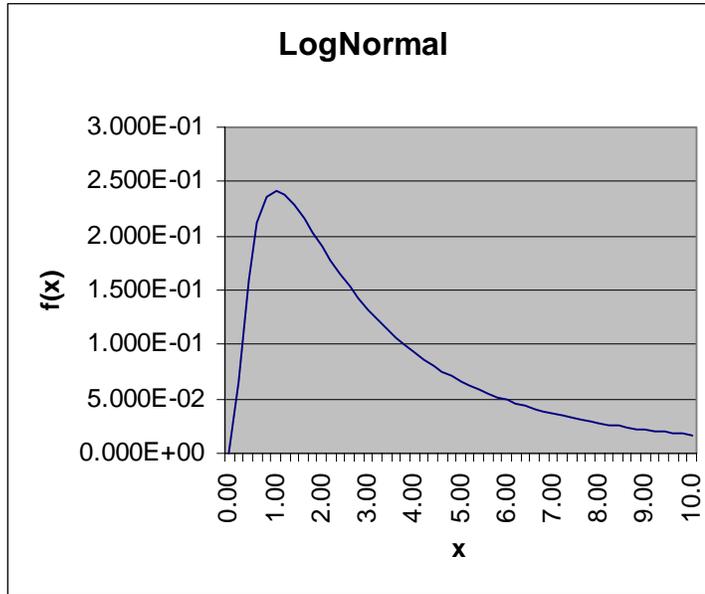


¹⁰ Referencia (3), páginas 246 a 248



Su comportamiento Gráfico es:

$\mu_Y=1.0000$	$\sigma_Y=1.0000$	$\mu_X=1.0000$	$\sigma^2_Y=1.0000$
$Finc=0.20$		$\mu_X=4.482E+00$	$\sigma^2_X=3.451E+01$
		$Med_X=2.718E+00$	$Mod_X=1.000E+00$





Función Generadora de Momentos y la Función Característica

Tanto la **Función Generadora de Momentos (FGM)**, como la **Función Característica (FC)**, son funciones especiales que su principal ventaja en el uso de ellas, es que para cada tipo de distribución de probabilidad, son únicas, y esto nos permite identificar de inmediato la forma de la distribución. A su vez, nos permiten evaluar diferentes momentos de la distribución correspondiente. Para ciertas distribuciones de probabilidad, la **FGM** puede no existir para todos los valores reales de “t”, en éste caso, podemos utilizar la **FC** que existe para todo “t”. En forma general, ambas son valores esperados de la variable aleatoria “X”, con transformaciones exponenciales, entrando en juego el valor de “t”.

Sea en la **FC**, “i” la unidad de números complejos, definida como: $i = \sqrt{-1}$.

La **FGM** se define como: $M_X(t) = E(e^{tX})$

La **FC** se define como¹¹: $C_X(t) = E(e^{tXi})$

En ésta síntesis sólo me referiré a la **FGM**, si llegara a ser necesario entonces se deberá tocar la Función Característica.

Por medio de la serie de Taylor, se puede expandir el exponencial, tomando a “t” fijo y en el origen de “X” (x = 0), de la siguiente forma:

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \dots + \frac{t^r X^r}{r!} + \xi$$

En donde la “ξ” representa un residuo de aproximación en la sucesión que tiende a cero cuando “r” aumenta, la **FGM** corresponde a la siguiente expansión.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots + \frac{t^r E(X^r)}{r!} + E(\xi)$$

La expresión anterior, plantea que la **Función Generadora de Momentos** de una variable aleatoria “X”, se describe como una serie de potencias en “t” y el coeficiente “t^r/r!” de la expansión va asociado en cada término con el **r-ésimo** momento en el origen (x = 0).

Si $\mu'_r = E(X^r)$ representa el **r-ésimo** momento alrededor del origen, entonces la **FGM** queda expresada como:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + t\mu'_1 + \frac{t^2}{2!}\mu'_2 + \frac{t^3}{3!}\mu'_3 + \dots + \frac{t^r}{r!}\mu'_r + E(\xi)$$

Si sólo estamos interesados en algunos momentos iniciales de la Distribución, podemos derivar la expresión anterior, evaluarla en “t = 0”, de tal forma que obtenemos el momento deseado.

$$\mu'_r = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)_{t=0}$$



¹¹ La utilización de números complejos es necesaria para el uso de la Función Característica, como ayuda de los mismos, ver: “Chapter 19, Complex Number and Functions”, Referencia (4), páginas 667 a la 690.

**Función Generadora de Momentos Factoriales**

En algunos casos de distribuciones discretas, simplifica y facilita la determinación de los momentos de una función, el uso de otra expresión en la función generadora de momentos, en vez de utilizar la expresión:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Que tiene un comportamiento exponencial, puede utilizarse la expresión de la Función Generadora de Momentos Factoriales (**FGMF**), la cual se define como:

$$MF_X(t) = E(t^X)$$

En ésta expresión, los momentos no se llevan a “**t = 0**”, sino son obtenidos en “**t = 1**”.

